Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Προχειρη Δοκιμασια 5

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

11 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων:*

$$\langle -,- \rangle \ : \ \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B \rangle = \mathsf{det}(A\cdot B)$$

$$\langle -,- \rangle \ : \ \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B \rangle = \mathsf{Tr}(A\cdot B)$$

$$\langle -,- \rangle \ : \ \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B \rangle = \mathsf{Tr}(A+B)$$

$$\langle -,- \rangle \ : \ \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B \rangle = \mathsf{det}(A+B)$$

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Πρόχειρη Δοκιμασία 5

Διδάσκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθός Ασκήσεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελίδα Μαθήματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

11 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Να εξετασθεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων:*

$$\langle -,- \rangle_1 \ : \ \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B\rangle_1 = \mathsf{det}(A\cdot B)$$
$$\langle -,- \rangle_2 \ : \ \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B\rangle_2 = \mathsf{Tr}(A\cdot B)$$
$$\langle -,- \rangle_3 \ : \ \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B\rangle_3 = \mathsf{Tr}(A+B)$$
$$\langle -,- \rangle_4 \ : \ \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A,B\rangle_4 = \mathsf{det}(A+B)$$

Λύση. $(\mathbf{1})$: *Για την απεικόνιση $\langle -,- \rangle_1$ η συμμετρική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου ισχύει αφού $\langle A,B\rangle_1 = \mathsf{det}(A\cdot B) = \mathsf{det}(A)\cdot\mathsf{det}(B) = \mathsf{det}(B)\cdot\mathsf{det}(A) = \mathsf{det}(B\cdot A)$. Όμως γνωρίζουμε από τη Θεωρία Οριζουσών ότι γενικά δεν ισχύει ότι $\mathsf{det}(A+B) = \mathsf{det}(A)+\mathsf{det}(B)$ για πίνακες $A,B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Επομένως η απεικόνιση $\langle -,- \rangle_1$ δεν είναι εσωτερικό γινόμενο διότι αν $A_1, A_2, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, τότε γενικά:*

$$\langle A_1+A_2, B\rangle_1 = \mathsf{det}((A_1+A_2)\cdot B) = \mathsf{det}(A_1\cdot B + A_2\cdot B) \neq \mathsf{det}(A_1\cdot B)+\mathsf{det}(A_2\cdot B) = \langle A_1,B\rangle_1 + \langle A_2,B\rangle_1$$

Για παράδειγμα, έστω

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Τότε εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς βρίσκουμε ότι

$$\langle A_1 + A_2, B\rangle_1 = \mathsf{det}(A_1\cdot B + A_2\cdot B) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} = -48$$

ενώ

$$\langle A_1, B\rangle_1 + \langle A_2, B\rangle_1 = \mathsf{det}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \mathsf{det}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} = -8 + 16 = 8$$

$(\mathbf{2})$: *Για την απεικόνιση $\langle -,- \rangle_2$ έχουμε:*

- $$\langle A,B\rangle_2 = \mathsf{Tr}(A\cdot B) = \mathsf{Tr}(B\cdot A) = \langle B,A\rangle_2$$
- $$\begin{aligned} \langle A_1 + A_2, B\rangle_2 = \mathsf{Tr}((A_1+A_2)\cdot B) &= \mathsf{Tr}(A_1\cdot B + A_2\cdot B) \\ &= \mathsf{Tr}(A_1\cdot B) + \mathsf{Tr}(A_2\cdot B) \\ &= \langle A_1,B\rangle_2 + \langle A_2,B\rangle_2 \end{aligned}$$

$$\langle \lambda A, B\rangle_2 = \mathsf{Tr}(\lambda A\cdot B) = \lambda\mathsf{Tr}(A\cdot B) = \lambda\langle A,B\rangle_2$$

- *Για να είναι η απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_2$ *εσωτερικό γινόμενο θα πρέπει να ισχύει και η τελευταία ιδιότητα, δηλαδή* $\langle A,A\rangle_2 = \mathsf{Tr}(A^2) \geq 0$ *και* $\langle A,A\rangle_2 = 0$ *αν και μόνο αν* $A = 0$. *Έστω ο πίνακας*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Τότε $\langle A,A\rangle_2 = \mathsf{Tr}(A^2) = -2 < 0$ *και το* $\mathsf{Tr}(A) = 0$ *ενώ ο πίνακας* A *δεν είναι ο μηδενικός. Άρα η απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_2$ *δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.*

$(\mathbf{3})$: *Για την απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_3$ *παρατηρούμε εύκολα ότι δεν ισχύει η τελευταία ιδιότητα. Έστω ο πίνακας*
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Τότε $\langle A,A\rangle_3 = \mathsf{Tr}(2A) = -4 < 0$ *και άρα η απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_3$ *δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.*

$(\mathbf{4})$: *Για την απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_4$ *παρατηρούμε πάλι ότι δεν ισχύει η τέταρτη ιδιότητα. Έστω ο πίνακας*
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Τότε $\langle A,A\rangle_4 = \mathsf{det}(A+A) = -8 < 0$ *και άρα η απεικόνιση* $\langle -,-\rangle_4$ *δεν είναι εσωτερικό γινόμενο.* $\square$

Παρατήρηση. *Για τις παραπάνω απεικονίσεις, εκτός της* $\langle , \rangle_2$, *υπάρχουν και άλλες ιδιότητες, εκτός αυτών που αναφέρθηκαν στην Λύση, οι οποίες δεν ικανοποιούνται.*